МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.В. Бельмас, Г.І.Танцура

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ

ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

для пошукачів вищої освіти, які навчаються за освітньо-науковими програмами третього PHD рівня зі спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»

Затверджено
редакційно-видавничою
комісією науково-методичної ради ДДТУ
25.06.2020р., протокол №4

Кам’янське
2020

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу Дніпровського державного технічного університету **заборонено.**

Конспект лекцій з дисципліни «Теорія напруженого стану» для пошукачів вищої освіти, які навчаються за освітньо-науковими програмами третього PHD рівня зі спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування». укл. Бельмас І.В., Танцура Г.І. Кам’янське: ДДТУ, 2020 р., стор. 65

Відповідальний за випуск зав. каф. ТМ. Бельмас І.В.

Рецензент проф. Бейгул О.О.

Затверджено на засіданні кафедри ТМ
(протокол № 11 від «09» червня 2020р.)

Коротка анотація видання: конспект лекцій надає можливість пошукачам

вищої освіти ознайомитися з методами визначення напружено-деформованого стану ізотропного матеріалу.

ЗМІСТ

ТЕМА 1. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНЬ

1.1. Основні поняття

Напружений стан окремих конструктивних елементів вивчається в опорі матеріалів. Такими елементами є стрижень, що працює на стиск або розтяг, балка – працює на згин та вал, що передає момент скручування. Для розрахунку напружено-деформованого стану більш широкого кола деталей користуються методами теорії пружності. Вона є розділом механіки, що вивчає деформації в твердому тілі, які викликані зовнішніми навантаженнями та внутрішні сили, які виникають при цьому як у стані спокою, так і у стані руху. В цьому курсі ми будемо розглядати перше.

Методи теорії базуються на моделі деформування ідеального пружного тіла. Деформації тіла прямо пропорційні його навантаженням. Воно суцільне до та внаслідок деформування, однорідне та ізотропне. Це означає що у всіх точках при одних і тих же напруженнях виникають однакові деформації та Ідеально пружні властивості тіла однакові по всіх напрямках. Вважається також що переміщення тіла малі у порівнянні з його лінійними розмірами, а відносні подовження та кути зсуву малі у порівнянні з одиницею.

Всі зовнішні сили, які діють на тверде тіло, можна розбити на дві групи: поверхневі та об`ємні.

Поверхневі сили виникають в результаті контакту тіл. Вони розподілені по поверхні тіла, наприклад, сила тиску води на греблю, сила тиску фундаменту будівлі на ґрунт. Вони характеризуються інтенсивністю, тобто значенням сили, яка діє на одиницю площини поверхні, по якій розподілена ця сила.

Об`ємні сили діють у кожній точці тіла. До них відносяться власна маса тіла, сили інерції.

Розглянемо зображене на рисунку 1.1 тверде тіло довільної форми, що знаходиться в рівновазі під дією поверхневих та об`ємних сил та прямокутна система координат *xyz*. Умовно, довільною площиною розділимо тіло на дві частини *A* і *B* та частину *B* відкинемо. Положення площини перетину визначається напрямком нормалі ν. Дію відкинутої частини замінимо силою, прикладеною до центру ваги перетину, та моментом.

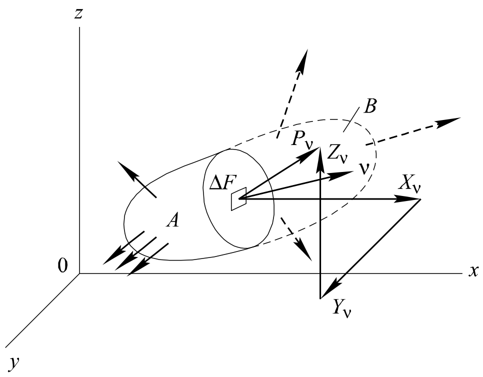

Рис. 1.1. Схема навантаження твердого тіла

Вказане зусилля та момент є рівнодіючими сил ΔS та моментів, що діють по всіх нескінченно малих площинах ΔF. Інтенсивність внутрішніх сил називають напруженням. За умови, що ΔF наближається до нуля отримаємо повне напруження в даній точці на площині з нормаллю v:

$$p_v = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta F}.$$

Замість повного напруження p_v розглядають його складові – проекції на осі координат X_v, Y_v, Z_v. Позначення X_ν читається так: проекція на вісь x повного напруження на площадці з зовнішньою нормаллю v.

У перетинах, паралельних координатним площинам, індекс v можна замінити індексом координатної осі, нормальної до перетину. Наприклад, у перетині, паралельному координатній площині yOz (рис. 1.2), зовнішня нормаль співпадає по напрямку з віссю x, і складові напруження позначаються так: X_x, Y_x, Z_x.

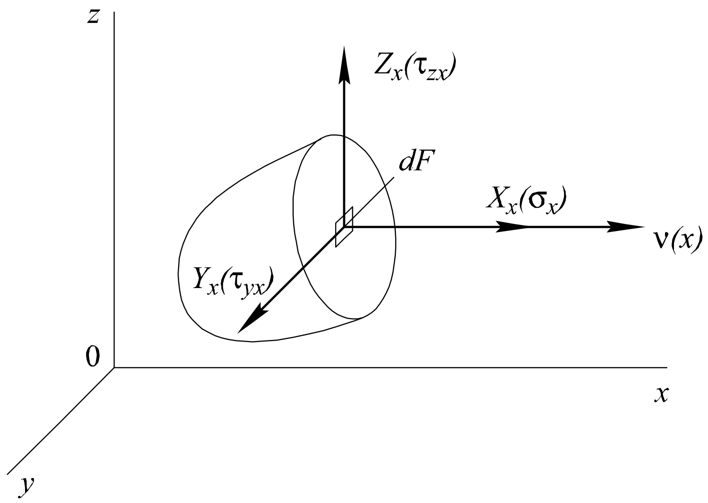

Рис. 1.2. Додатні напрямки напружень у перетині

Складова X_x спрямована нормально (під прямим кутом) її називають нормальним напруженням. Складові Y_x, Z_x, що лежать в площині перетину, називаються дотичними напруженнями.

Для позначення нормальних і дотичних напружень нарівні з розглянутою можуть застосовуватися також і інші системи позначень. Наприклад, нормальні напруження позначаються грецькою буквою σ, а дотичні – грецькою буквою τ. Так, нормальне напруження X_x можна позначити σ_x, де індекс x позначає нормаль до перетину. Дотичні напруження Y_x та Z_x в цьому перетині можна позначати відповідно τ_{yx} та τ_{zx}, де перший індекс означає направ-лення дотичного напруження, а другий – нормаль до перетину.

З дев`яти складових напружень на всіх трьох площадках, паралельних координатним площинам, три складові є нормальними напруженнями: $X_x = \sigma_x$, $Y_y = \sigma_y$, $Z_z = \sigma_z$, а шість складових – дотичними:

$$X_z = \tau_{xz},\ \ Y_x = \tau_{yx},\ \ Z_y = \tau_{zy},$$

$$X_y = \tau_{xy},\ \ Y_z = \tau_{yz},\ \ Z_x = \tau_{zx}.$$

У подальшому будемо користуватися позначеннями викладенні другої системи позначень, що застосовувалася в опорі матеріалів.

Напруження, які виникають у твердому тілі, у загальному випадку можуть бути різними в різних точках тіла, тобто є функціями координат точок:

$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z);$$

$$\sigma_y = \sigma_y(x,y,z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z);$$

$$\sigma_z = \sigma_z(x,y,z); \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y,z).$$

1.2 Диференційні рівняння рівноваги

Виділимо з тіла, що знаходиться під дією зовнішніх сил, нескінченно малий паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам, і ребрами довжиною dx, dy та dz. Установимо залежність між складовими напружень, діючих на гранях цього паралелепіпеда. Складові напружень є функціями трьох координат. Наприклад, нормальне напруження σ_x в точці з координатами x, y, z можна позначити $\sigma_x = \sigma_x(x,y,z)$. рівняння проекцій на осі x, y та z.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

1.3 Напруження на похилих площадках. Умови на поверхні

Для дослідження напруженого стану в довільній точці тіла необхідно вміти знаходити напруження на довільній площадці, похилій до координатних осей. Положення в просторі нескінченно малої площадки *abc*, зображеної на рис. 1.3, визначається нормаллю v, напрямні косинуси якої

$$\cos(x,\nu) = l, \quad \cos(y,\nu) = m, \quad \cos(z,\nu) = n,$$

Похила площадка *abc* разом з координатними площадками *aOb*, *bOc* та *cOa* утворює нескінченно малий тетраедр. Позначимо площу грані *abc* через *dF*; тоді площі інших граней тетраедра визначимо як проекції площі грані *abc* на відповідні координатні площини: пл. $bOc = dF \cdot l$, пл. $cOa = dF \cdot m$, пл. $aOb = dF \cdot n$.

На тетраедр, що розглядається, діють наступні сили: на координатних площадках – сили від шести складових напружень σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} та τ_{zx}, на площадці *abc* – сили від трьох складових повного напруження X_ν, Y_ν та Z_ν і по всьому об`єму – складові об`ємної сили *X*, *Y*, *Z* (останні на рис. 1.3 не показані).

Проектуючи всі сили на вісь x, отримуємо

$$X_\nu dF - \sigma_x dFl - \tau_{xy} dFm - \tau_{xz} dFn + XdV = 0.$$

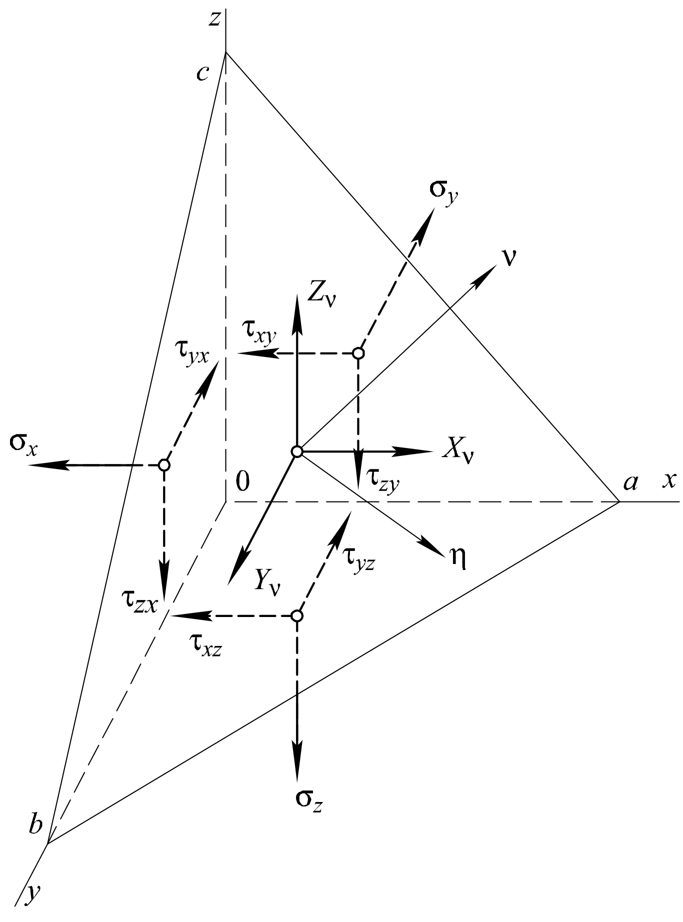

Рис. 1.3. Нескінченно малий тетраедр

Тут останній доданок має третій порядок малості (dV), а інші – другий (dF). Нехтуючи доданком третього порядку малості і ділячи всі інші доданки на dF, знаходимо

$$X_\nu = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n,$$

Складаючи рівняння проекцій всіх сил, діючих на тетраедр $Oabc$, на осі y і z, отримуємо ще два рівняння. Таким чином, приходимо до наступних трьох рівнянь рівноваги елементарного тетраедра:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_\nu &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_\nu &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Рівняння (1.2) дозволяють визначати складові напруження на довільній похилій площадці з нормаллю ν за допомогою шести складових напружень на площадках, паралельних координатним площинам.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає об’єкт вивчення теорії пружності?
2. Які гіпотези покладені в основу математичної теорії пружності?
3. Як виводяться диференціальні рівняння рівноваги?

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧНА ТЕОРІЯ ДЕФОРМАЦІЙ

2.1. Складові переміщень та деформації

Досліджуємо деформацію пружного тіла. Для її визначення необхідно порівняти положення тіла до і після прикладення навантаження. На рис. 2.1 показані тіло і точка A з координатами x, y, z. Під дією навантаження точка A

переміститься в нове положення A' з координатами x', y', z'. Вектор AA' називається вектором переміщення точки А.

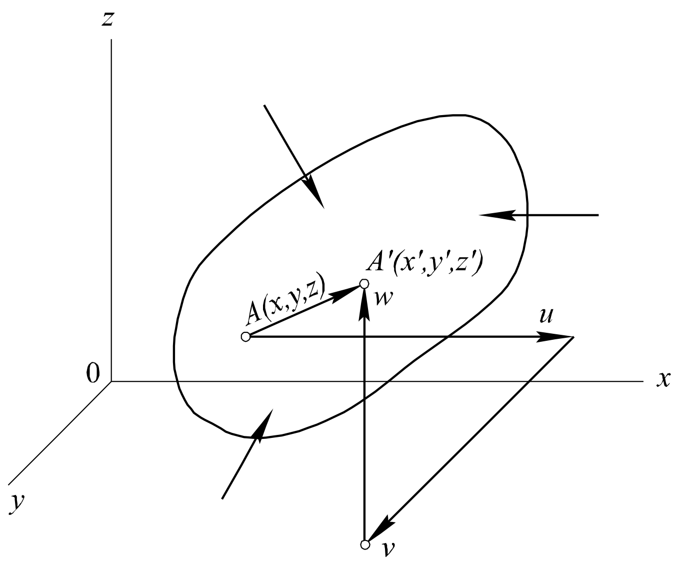

Рис. 2.1. Складові переміщення довільної точки А при деформації тіла

Розрізняють два види переміщень: переміщення всього тіла як єдиного цілого без його деформування і переміщення, пов`язане з деформуванням тіла. Переміщення першого виду вивчаються в теоретичній механіці як переміщення абсолютно твердого тіла. В теорії пружності розглядають тільки переміщення, пов`язані з деформуванням тіла.

Будемо вважати, що тіло, яке розглядається, закріплено так, щоб воно не переміщувалося як абсолютно тверде тіло. Позначимо проекції вектора переміщення точки A на координатні осі через u, v, w. Вони дорівнюють різниці відповідних координат точок A та A':

$$u = x' - x; \qquad v = y' - y; \qquad w = z' - z$$

і є функціями координат:

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z).$$

Шість основних залежностей складових лінійних і кутових деформацій від складових переміщення:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Ці геометричні співвідношення були виведені Коші і називаються рівняннями Коші.

Правило знаків для складових деформації.

1. Додатним лінійним деформаціям відповідають подовження по відповідних напрямках, а від'ємним — укорочення.

2. Додатним кутовим деформаціям відповідають зменшення кутів між додатними напрямками координатних осей, а від'ємним — збільшення тих же кутів.

2.2. Об`ємна деформація

В загальному випадку деформування об`єм тіла змінюється. Розглянемо нескінченно малий паралелепіпед об`ємом $dV = dxdydz$. З точністю до нескінченно малих величин вищого порядку можна вважати, що змінення цього об`єму пов`язано тільки зі зміненням довжини ребер, але не з кутовими деформаціями.

$$dx_1 = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{2.2}$$

Скориставшись першим рівнянням системи (2.1), отримуємо

$$dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x). \tag{2.3}$$

Аналогічно обчислюємо довжини двох інших ребер після деформування:

$$dy_1 = dy\left(1+\varepsilon_y\right);\; dz_1 = dz\left(1+\varepsilon_z\right). \qquad (2.4)$$

Об`єм паралелепіпеда після деформування знаходимо як добуток нових довжин ребер:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx\left(1+\varepsilon_x\right)dy\left(1+\varepsilon_y\right)dz\left(1+\varepsilon_z\right). \qquad (2.5)$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 =$$
$$= \left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\right).$$

Нехтуючи у дужках величинами другого і третього порядку малості та враховуючи, що $dxdydz = dV$, знаходимо

$$dV_1 = dV\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right).$$

Позначаючи відносне змінення об`єму $\left(dV_1 - dV\right)/dV$ через θ, отримуємо

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (2.6)$$

Таким чином, об`ємна деформація дорівнює сумі лінійних деформацій по трьох взаємно перпендикулярних напрямках.

Об`ємну деформацію можна виразити через складові переміщення:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2.7)$$

2.3. Рівняння нерозривності деформацій

Геометричні співвідношення Коші (2.1) зв`язують шість складових деформації ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} та три складових переміщення u, v, w.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Необхідність забезпечення наведених залежностей можна обґрунтувати і геометричним шляхом. Уявимо собі тіло розрізаним на малі паралелепіпеди. Якщо кожний з цих паралелепіпедів отримає довільні деформації, то з окремих деформованих паралелепіпедів не вдасться знову скласти безперервне тверде тіло: в деяких точках після деформування виникнуть нескінченно малі розриви. Останні рівняння (2.8) установлюють такі залежності між складовими деформації, за виконання яких тіло і після деформування остається суцільним, або безперервним. Вони називаються рівняннями нерозривності деформацій Сен-Венана.

Питання для самоконтролю

1. Які залежності існують між деформаціями та переміщеннями?
2. У чому сутність об’ємної деформації?
3. Які співвідношення покладені в основу виведення рівнянь суцільності?

ТЕМА 3. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА

3.1. Визначення деформацій через напруження

Для сумісного розглядання теорії напружень і теорії деформацій необхідно установити залежності між напруженнями і деформаціями. Ці залежності носять фізичний характер. Дійсно, розглядаючи діаграми розтягнення різних матеріалів, що вивчаються в курсі опору матеріалів, заключаємо, що залежності напруження-деформація визначаються фізичними властивостями матеріалів.

Обмежуючись малими деформаціями пружного тіла, зв`язок між напруженнями і деформаціями можна прийняти лінійним. При цьому у загальному випадку кожна складова напруження може залежати від усіх складових деформації. Для ізотропного тіла вони описуються шістьома формулами - узагальненим законом Гука.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

3.2. Визначення напружень через деформації

При вирішенні задач часто буває необхідно мати вирази складових напружень через складові деформації.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\text{де} \ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Шляхом перетворень можна отримати ще одну форму закону Гука. Середнє напруження в точці пропорційне середній деформації в цій точці.

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0, \tag{3.3}$$

Питання для самоконтролю

1. Які константи залучаються при вивченні напруженого стану?
2. Чим відрізняються модулі першого та другого роду?
3. Як записати пряму форму узагальненого закону Гука?

ТЕМА 4. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

4.1. Основні рівняння та способи їх розв'язання

У попередніх главах отримані три групи рівнянь, які утворюють основні рівняння теорії пружності. Група статичних рівнянь рівноваги (1.1) і умов на поверхні (1.2), група геометричних рівнянь (2.1) і рівняння нерозривності деформацій (2.8), група фізичних рівнянь формули закону Гука в прямій формі (3.1) та у зворотній формі (3.2) дозволяють розв'язувати задачі теорії пружності про напруження та деформації, що виникають у пружному ізотропному тілі під дією зовнішніх сил. Перелічені рівняння мають 15 незалежних функцій: шість складових напружень, шість складових деформацій і три складових переміщень

Розв'язання рівнянь можна вести різними способами в залежності від того, які величини прийняті за основні невідомі.

1. Розв'язання в переміщеннях, коли за невідомі прийняті три складових переміщення: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

2. Розв'язання в напруженнях, коли за невідомі прийняті шість складових напружень:

$$\sigma_x(x, y, z),\ \sigma_y(x, y, z),\ \sigma_z(x, y, z), \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy}(x, y, z),\ \tau_{yz}(x, y, z),\ \tau_{zx}(x, y, z). \quad (4.2)$$

3. Розв'язання у змішаній формі, коли за невідомі прийняті деякі складові переміщень і деякі складові напружень.

4.2. Задачі в переміщеннях

Для знаходження трьох складових переміщення $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ необхідно мати три рівняння, які можна отримати з диференціальних рівнянь рівноваги (1.1), виразивши в них напруження через переміщення. Скористаємося першим рівнянням (1.1) і підставимо в нього напруження з формул закону Гука (3.2). В результаті отримуємо

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} + \mu\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (4.3)$$

Потім в записане рівняння підставимо значення деформацій (2.1). Після групування доданків знаходимо

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\partial z}\right) + X = 0. \quad (4.4)$$

Вираз у перших дужках можна позначити скорочено:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u. \quad (4.5)$$

Цей диференціальний оператор називається оператором Лапласа над функцією $u(x, y, z)$ і читається «набла два u».

Вираз, який стоїть у других дужках, можна спростити наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Після указаних скорочень і спрощень рівняння (а) приймає вигляд:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0. \qquad (4.7)$$

Аналогічно перетворюємо і два інших диференціальних рівняння (1.1). Таким чином, отримуємо систему рівнянь для розв’язання задач теорії пружності в переміщеннях:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0;\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+Y=0;\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+Z=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Ці рівняння називаються рівняннями Ламе. Вони об’єднують статичні, геометричні та фізичні передумови теорії пружності, розглянуті у попередніх розділах. Дійсно, в них є умови рівноваги кожного елемента тіла, геометричні характеристики деформації u, v, w, θ та фізичні характеристики матеріалу λ та μ.

Так же, як рівняння рівноваги, перетворюємо умови на поверхні. Для цього в перше рівняння (1.2) підставляємо вираз напружень через деформації (3.2):

$$X_v=(\lambda\theta+2\mu\varepsilon_x)l+\mu\gamma_{xy}m+\mu\gamma_{xz}n.$$

Підставимо сюди значення деформацій (2.1) та згрупуємо всі члени наступним чином:

$$X_\nu = \lambda\theta l + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n\right). \quad (б)$$

Вираз у перших дужках представляє собою похідну функції $u(x, y, z)$ по напрямку нормалі ν до поверхні тіла. Дійсно, обчислюючи похідну складної функції $u(x, y, z)$ по перемінній ν, отримуємо

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\nu} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{d\nu}.$$

Похідні координат по ν є відповідними направляючими косинусами нормалі ν:

$$\frac{dx}{d\nu} = l; \qquad \frac{dy}{d\nu} = m; \qquad \frac{dz}{d\nu} = n.$$

Таким чином,

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

і рівняння (б) приймає вигляд:

$$X_\nu = \lambda\theta l + \mu\frac{du}{d\nu} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n\right). \quad (в)$$

Точно так же можна перетворити два інших рівняння (1.2). В результаті приходимо до наступних трьох умов на поверхні, визначених через переміщення:

$$\left.\begin{aligned} X_v &= \lambda\theta l + \mu\frac{du}{dv} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}l + \frac{\partial v}{\partial x}m + \frac{\partial w}{\partial x}n\right); \\ Y_v &= \lambda\theta m + \mu\frac{dv}{dv} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}l + \frac{\partial v}{\partial y}m + \frac{\partial w}{\partial y}n\right); \\ Z_v &= \lambda\theta n + \mu\frac{dw}{dv} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}l + \frac{\partial v}{\partial z}m + \frac{\partial w}{\partial z}n\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Тепер можна скласти план безпосереднього розв'язання задач теорії пружності в переміщеннях. Для знаходження трьох складових переміщення u, v та w необхідно виконати інтегрування рівнянь Ламе (4.8) і задовольнити умовам на поверхні (4.9). По знайдених переміщеннях з рівнянь Коші (2.1) визначаємо складові деформації, а потім з формул закону Гука (3.2) — складові напружень.

4.3. Задачі в напруженнях

У подальшому коло задач обмежуємо випадками, коли об'ємні сили постійні по всьому об'єму тіла або дорівнюють нулю. Це обмеження дозволяє значно спростити деякі розв'язання при розв'язанні задач в напруженнях, оскільки всі похідні від складових об'ємних сил по координатах x, y, z, перетворюються в нуль.

Розглянемо властивості функції $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ та $S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ при постійних об'ємних силах. Виконаємо диференціювання рівнянь Ламе (4.8) першого по x, другого — по y, третього — по z. Складемо окремі члени, отримуємо.

$$\left(\lambda+\mu\right)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w\right)=0. \quad \text{(a)}$$

Вираз, що стоїть у перших дужках, представляє собою оператор Лапласа над функцією θ:

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=\nabla^2\theta.$$

Вираз у других дужках можна перетворити наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w=\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\nabla^2\theta.$$

Тоді замість рівняння (а) отримуємо

$$\left(\lambda+2\mu\right)\nabla^2\theta=0,$$

або

$$\nabla^2\theta=0. \tag{4.10}$$

Функція, що відповідає рівнянню (4.10), називається гармонічною. Отже, при постійних об’ємних силах об’ємна деформація θ є гармонійною функцією.

Підставляючи у рівняння (4.10) вираз об’ємної деформації θ з формули закону Гука (3.3), отримуємо

$$\nabla^2 S_1=0, \tag{4.11}$$

тобто при постійних об’ємних силах перший інваріант напруженого стану також є гармонійною функцією.

При розв’язанні задач теорії пружності у напруженнях за основні невідомі приймають шість складових напружень:

σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Для їх знаходження трьох рівнянь рівноваги (1.1) недостатньо і тому треба додати ще шість рівнянь нерозривності деформацій (2.8). До останніх входять складові деформації, які необхідно уперед виразити через напруження. Підставляючи в перше рівняння (2.8) вирази деформацій (3.1), отримуємо

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} - \nu\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} -$$

$$- \nu\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right) - 2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0. \qquad (б)$$

Для практичного застосування рівняння (б) слід перетворити, виключивши з нього дотичне напруження τ_{xy}. Для цього виконаємо диференціювання першого рівняння рівноваги (4.1) по *x*, другого — по y, третього — по z. Додаючи почленно два перших з отриманих рівнянь та віднімаючи третє, знаходимо

$$-2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}. \qquad (в)$$

Підставляючи співвідношення (в) у рівняння (б), отримуємо

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2} - \nu\nabla^2\sigma_z = 0.$$

Додамо та віднімемо в цьому рівнянні $\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}$, $\nabla^2\sigma_z$. Тоді з урахуванням рівняння (4.11) отримуємо

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0.$$

Аналогічно можна перетворити інші рівняння нерозривності деформацій (2.8). В результаті отримуємо шість рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+v)\nabla^2\sigma_x+\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2}=0, \qquad (1+v)\nabla^2\tau_{xy}+\frac{\partial^2 S_1}{\partial x\partial y}=0;\\
&(1+v)\nabla^2\sigma_y+\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2}=0, \qquad (1+v)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2 S_1}{\partial y\partial z}=0;\\
&(1+v)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2}=0, \qquad (1+v)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2 S_1}{\partial z\partial x}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Ці рівняння отримані в 1892р. італійським математиком Е. Бельтрамі. У 1899р. австралієць Дж. Мічелл вивів аналогічні рівняння для загального випадку, коли об'ємні сили не постійні і, отже, в праву частину рівнянь замість нулів входять члени, що мають похідні від об'ємних сил. Тому рівняння (4.12) називають рівняннями Бельтрамі-Мічелла.

Таким чином, для розв'язання задач теорії пружності в напруженнях доводиться інтегрувати дев'ять рівнянь (1.1) та (4.12). Наявність трьох зайвих рівнянь необхідна для отримання однозначного розв'язання, що обговорювалося при виведенні рівнянь нерозривності деформацій (2.8), наслідком яких є рівняння Бельтрамі-Мічелла.

Отримані після інтегрування шість складових напружень мають задовольняти умовам на поверхні (1.2). Після цього по формулах закону Гука (3.1) визначають складові деформацій, а з геометричних співвідношень (2.1) — складові переміщень.

4.4. Типи крайових умов на поверхні тіла

З попереднього видно, що розв'язання задач теорії пружності будь-яким способом зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь в парціальних похідних, що визначають поведінку пружного тіла у внутрішніх точках. До цих рівнянь додаються умови на поверхні, яка обмежує тіло. Ці умови диктують завдання або зовнішніх поверхневих сил, або переміщень точок поверхні тіла. В залежності від цього звичайно формулюють один з трьох типів крайових задач.

Перша крайова задача — кінематична. В об'ємі тіла знаходять складові переміщень, які приймають на поверхні певні значення. В умові на поверхні тіла, таким чином, задаються рівняння поверхні та значення складових переміщень на цій поверхні.

Друга крайова задача — статична. В цьому випадку на поверхні тіла не накладені ніякі обмеження на переміщення і задаються рівняння поверхні, направляючі косинуси нормалі до поверхні та значення складових поверхневих навантажень. Ці дані вносяться в рівняння (1.2).

У випадку, коли поверхня тіла співпадає з координатними площинами, крайові задачі можуть бути сформульовані безпосередньо в напруженнях. Тоді достатньо указати рівняння поверхні і задати значення складових напружень на цій поверхні.

Третя крайова задача — змішана. В цьому випадку на одній частині поверхні тіла задаються кінематичні умови, а на інший — статичні.

Однак, цими трьома задачами не вичерпується вся різноманітність крайових умов. Наприклад, на певній ділянці поверхні можуть бути задані не всі три складові переміщення або складові поверхневого навантаження.

4.5 Методи розв'язання задач теорії пружності

Встановлено що розв'язання задач теорії пружності однозначне та не залежить від методу розв'язання. Можна указати три основні методи математичного розв'язання задач теорії пружності:

1. Прямий метод. Цей метод полягає у безпосередньому інтегруванні рівнянь теорії пружності сумісно з заданими умовами на поверхні.

2. Зворотний метод. У цьому випадку задаються функціями переміщень або напружень, що задовольняють диференціальним рівнянням, і визначають, яким зовнішнім навантаженням відповідає система переміщень або напружень, що розглядається.

3. Напівзворотний метод Сен-Венана. При розв’язанні задач цим методом робиться припущення про вигляд деяких функцій напружень чи переміщень. Потім за допомогою рівнянь теорії пружності установлюються залежності, яким мають задовольняти функції напружень і переміщень, які залишилися. При цьому диференціальні рівняння настільки спрощуються, що розв’язання їх не складає особливих труднощів. Напівзворотний метод є одним з найбільш ефективних методів розв’язання задач теорії пружності.

Розглянемо розв’язання задачі на прикладі. Нехай на пружний напівпростір $z \geq 0$ дотично до граничної поверхні $z = 0$ в точці початку осей координат вздовж осі x прикладена дотична сила *T*. Введемо дві бігармонійні функції [1].

$$\varphi_1 = \frac{T}{4\pi(1-\mu)}\Big(R + 2(1-\mu)(1-2\mu)\big(z\ln(R+z) - R\big)\Big),$$

$$\varphi_3 = \frac{T}{4\pi(1-\mu)}\Big((1-2\mu)x\ln(R+z)\Big),$$

де $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Отримаємо розв’язки рівнянь Ламе методом Гальоркіна.

$$u_x = \frac{T}{4\pi GR}\left(\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}+\frac{x^2}{R^2}\right)-\frac{T}{2\pi R(\lambda+G)}+\frac{T}{4\pi(\lambda+G)}\left(1-\frac{x^2}{R(R+z)}\right)$$

$$u_y = \frac{T}{4\pi}\frac{xy}{R}\left(\frac{1}{GR^2}-\frac{1}{(\lambda+G)(R+z)^2}\right)$$

$$u_z = \frac{T}{4\pi}\frac{x}{R}\left(\frac{z}{GR^2}-\frac{1}{(\lambda+G)(R+z)}\right)$$

де

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

За відомих переміщень, за виразами (3.8) визначаємо напруження.

$$Xx = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3x^3}{R^5}+\frac{Gx}{\lambda+G}\left[\frac{3}{R(R+z)^2}-\frac{x^2(3R+z)}{R^3(R+z)^3}-\frac{1}{R^3}\right]\right\},$$

$$Yy = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3xy^2}{R^5}+\frac{Gx}{\lambda+G}\left[\frac{1}{R(R+z)^2}-\frac{y^2(3R+z)}{R^3(R+z)^3}-\frac{1}{R^3}\right]\right\},$$

$$Xy = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3x^2y}{R^5}+\frac{Gy}{\lambda+G}\left[\frac{1}{R(R+z)^2}-\frac{y^2(3R+z)}{R(R+z)^3}-\frac{1}{R^3}\right]\right\},$$

$$Zz = \frac{T}{2\pi}\frac{3xz^2}{R^5},\ Yz = \frac{T}{2\pi}\frac{3xyz}{R^5},\ Zx = \frac{T}{2\pi}\frac{3x^2z}{R^5}$$

Питання для самоконтролю

1. Які групи рівнянь теорії пружності Вам відомі?
2. Які рівняння входять до складу групи статичних рівнянь теорії пружності?
3. Які способи розв’язання рівнянь теорії пружності існують?
4. У чому полягає сутність розв’язання задач теорії пружності у переміщеннях?

5. У чому полягає сутність розв’язання задач теорії пружності у напруженнях?

ТЕМА 5 ПЛОСКА ЗАДАЧА У ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ

5.1. Плоска деформація

Всі рівняння теорії пружності значно спрощуються в тих випадках, коли задачу можна звести до відшукання функцій тільки двох перемінних, наприклад, *x* та *y*. У пружному тілі плоска деформація виникає, якщо переміщення відбуваються тільки паралельно площині *xOy*:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad w = 0. \tag{5.1}$$

Такі переміщення виникають у довгому призматичному або циліндричному тілі, поздовжня вісь якого паралельна осі *Oz*, при дії навантаження, перпендикулярного цій осі та постійного вздовж неї. Підставляючи складові переміщення (5.1) в формули (2.1), отримуємо

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y), && \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y);\\ &\varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y), && \gamma_{yz} = 0;\\ &\varepsilon_z = 0, && \gamma_{zx} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Відсутність лінійних деформацій в напрямку осі *Oz* спричиняє появу нормальних напружень σ_z. Ці напруження залежать від напружень, діючих в площині *xOy*. Дійсно, з третьої формули закону Гука (3.2) при відсутності деформації ε_z витікає, що

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{5.3}$$

та

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,\ \sigma_x = \sigma_x(x, y),\ \sigma_y = \sigma_y(x, y),\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

На основі співвідношення (5.3) напруження σ_z також є функцією тільки двох координат:

$\sigma_z = \sigma_z(x,y)$.

Таким чином, основні рівняння теорії пружності у випадку плоскої деформації (1.1), (3.8), (2.3), (2.8), (3.2), (3.8)спрощуються

Останні відрізняються від формул закону Гука для плоскої деформації тільки значеннями пружних сталих. Отже, при розв’язанні задач про плоску деформацію та узагальнений плоский напружений стан можна користуватися одними й тими ж рівняннями і об’єднувати обидві задачі в одну: плоску задачу теорії пружності.

У плоскій задачі теорії пружності невідомими є вісім функцій: три складових напружень σ_x, σ_y, τ_{xy}; три складових деформацій ε_x, ε_y, γ_{xy} та дві складових переміщень u та v. Рівнянь для розв’язання задачі також вісім: два диференційних рівняння рівноваги (1.1), три геометричних співвідношення Коші (2.1) і три формули закону Гука (3.1) або (3.2).

Якщо за умови задачі переміщення шукати не треба, то залишаються шість невідомих: три складових напружень і три складових деформацій. Для їх визначення достатньо шести рівнянь, що залишились: двох диференціальних рівнянь рівноваги (1.1), трьох формул закону Гука (3.1) або (3.2) та одного рівняння нерозривності деформацій (2.8).

5.2. Функція напружень

Розв'язання плоскої задачі в напруженнях зводиться до відшукання трьох невідомих функцій $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ та $\tau_{xy}(x,y)$. Для цього є два диференціальних рівняння (1.1). До них слід додати рівняння нерозривності деформацій (2.8), замінивши в ньому деформації на напруження за допомогою формул закону Гука (3.1) для узагальненого плоского напруженого стану. Після спрощення отримуємо

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5.4)$$

Виключимо з цього рівняння дотичне напруження τ_{xy}. Для цього виконаємо диференціювання першого рівняння рівноваги по x, а другого — по y та складемо. Вважаючи, як і в просторовій задачі, об'ємні сили постійними, знайдемо

$$-2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (5.5)$$

Підставивши це співвідношення у рівняння (а), отримуємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

або в скорченій формі

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0. \quad (5.6)$$

Таким чином, сума нормальних напружень у плоскій задачі є гармонічною функцією. Це рівняння носить назву рівняння Мориса Леві і виведене для узагальненого плоского напруженого стану. Воно не має пружних сталих тому і у випадку плоскої деформації має той самий вигляд.

Розв'язання плоскої задачі можна спростити, звівши її до знаходження однієї функції $\varphi(x,y)$, що називається функцією напружень Ері. Її обирають з таким розрахунком, щоб диференціальні рівняння рівноваги (1.1) перетворювались у тотожності. Ці умови будуть виконані, якщо напруження виразити через функцію Ері наступними співвідношеннями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Дійсно, підставляючи ці вирази у рівняння рівноваги (1.1), отримаємо тотожності, тобто прийнята функція напружень $\varphi(x,y)$ є розв'язанням цих рівнянь.

Підставляючи тепер напруження (5.7) у рівняння нерозривності деформацій (2.8), знаходимо

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \tag{б}$$

Вираз, що у дужках, представляє собою оператор Лапласа над функцією $\varphi(x,y)$. Тому рівняння (б) може бути представлене за допомогою оператора Лапласа так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

або

$$\nabla^4 \varphi = 0. \tag{в}$$

Ліва частина останнього рівняння читається як «набла чотири φ» і називається подвійним оператором Лапласа над функцією φ. Функція, що відповідає рівнянню (в), називається бігармонійною, а саме рівняння — бігармонійним рівнянням. Представимо його у розгорнутому вигляді:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)=0.$$

Виконаємо диференціювання:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}=0. \qquad (5.8)$$

Виразимо умови на поверхні для плоскої задачі через функцію напружень за допомогою рівняння (5.7):

$$X_v=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\,l-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}+Xy+Yx\right)m;$$

$$Y_v=-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}+Xy+Yx\right)l+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,m.$$

Отже, плоска задача теорії пружності зведена до знаходження одної бігармонійної функції φ(x,y), що задовольняє заданим умовам на контурі.

5.3. Методи розв’язання плоскої задачі для прямокутних ділянок

Знаходження бігармонійної функції, що задовольняє умовам на контурі прямокутної області, можливе різними методами. Обмежимося розгляданням лише деяких з них: розв’язання плоскої задачі в поліномах (цілих функціях), у тригонометричних рядах, за допомогою кінченних різниць.

1. Розв’язання плоскої задачі в поліномах. Розв’язання плоскої задачі можна здійснити зворотним методом, якщо спочатку задатися аналітичною формою функції напружень, що задовольняє бігармонійному рівнянню (5.8),

а потім визначити, яким навантаженням на контурі вона відповідає. У якості бігармонійної функції можна приймати алгебраїчні поліноми різних степенів.

Поліном першої степені $\varphi_1 = a_1 x + b_1 y$ як функція напружень нас не цікавить, оскільки напруження, підраховані по формулах (5.7), перетворюються в нуль.

Розглянемо функцію напружень у вигляді полінома другої степені

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2 \cdot 1} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{1 \cdot 2} y^2 . \tag{5.9}$$

Четверті похідні цієї функції:

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = 0,$$

і, отже, рівняння (6.11) перетворюється у тотожність при будь-яких значеннях коефіцієнтів a_2, b_2, c_2. Таким чином, поліном другої степені є бігармонійною функцією і може бути застосований до розв’язання плоскої задачі.

Якщо функцію напружень прийняти у вигляді полінома третьої степені

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3 , \tag{5.10}$$

то рівняння (5.8), як і раніше, буде перетворюватися у тотожність при довільних значеннях коефіцієнтів a_3, b_3, c_3 та d_3, тобто поліном третьої степені є бігармонійною функцією і також може бути застосований для розв’язання плоскої задачі.

Задамо функцію $\varphi(x,y)$ у вигляді полінома четвертої степені:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4 . \tag{5.11}$$

Четверні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Підставляючи їх у біогармонічне рівняння, отримуємо

$$2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0,$$

звідки

$$e_4 = -a_4 - c_4. \tag{a}$$

Таким чином, не всі коефіцієнти полінома четвертої степені довільні. Незалежними можуть бути тільки чотири коефіцієнти, наприклад, a_4, b_4, c_4 та d_4, а п’ятий слід взяти зі співвідношення (а). Отже, для того, щоб поліном четвертої степені був бігармонійною функцією, він повинен мати такий вигляд:

$$\varphi_4 = a_4\left(\frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{y^4}{3\cdot 4}\right) + \frac{b_4}{3\cdot 2}x^3 y + c_4\left(\frac{x^2 y^2}{2\cdot 2} - \frac{y^4}{3\cdot 4}\right) + \frac{d_4}{2\cdot 3}xy^3.$$

Розглянемо поліном п’ятої степені:

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5\cdot 4}x5 + \frac{b_5}{4\cdot 3}x^4 y + \frac{c_5}{3\cdot 2}x^3 y^2 + $$

$$+ \frac{d_5}{2\cdot 3}x^2 y^3 + \frac{e_5}{3\cdot 4}xy^4 + \frac{f_5}{4\cdot 5}y^5. \tag{5.12}$$

Четверті похідні цієї функції:

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^4} = 6a_5 x + 2b_5 y;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^2 \partial y^2} = 2c_5 x + 2d_5 y;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial y^4} = 2e_5 x + 6 f_5 y.$$

Підставляючи їх в бігармонійне рівняння (5.8) і групуючи доданки по аргументах x та y, отримуємо

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3 f_5)y = 0 .$$

Щоб ці рівняння перетворювалися у тотожності при будь-яких значеннях аргументів, необхідно коефіцієнти при цих перемінних прирівняти нулю:

$$\left.\begin{aligned} 3a_5 + 2c_5 + e_5 = 0; \\ b_5 + 2d_5 + 3 f_5 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

Якщо незалежними прийняти коефіцієнти a_5, b_5, c_5 та d_5, то інші два виразяться через них згідно рівняння (б) наступним чином:

$$\left.\begin{aligned} e_5 = -3a_5 - 2c_5; \\ f_5 = -\frac{1}{3}b_5 - \frac{2}{3}d_5. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Вносячи коефіцієнти e_5 та f_5 зі співвідношення (в) у формулу (5.12), знаходимо

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4}\left(x^5 - 5xy^4\right) + \frac{b_5}{4 \cdot 3}\left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5\right) +$$

$$+ \frac{c_5}{3 \cdot 2}\left(x^3 y^2 - xy^4\right) + \frac{d_5}{2 \cdot 3}\left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5\right). \qquad (5.13)$$

У такій формі поліном п'ятої степені є бігармонійною функцією та може бути застосованим до розв'язання плоскої задачі.

За допомогою алгебраїчних поліномів можна розв'язати ряд простих задач: задачу про чистий вигин балки, вигин балки на двох опорах під дією рівномірно розподіленого навантаження, задачу про трикутну підпірну стінку.

2. Розв'язання плоскої задачі у тригонометричних рядах. У якості функції напружень $\varphi(x,y)$ можна застосовувати тригонометричні ряди. Дослідимо з цією метою тригонометричну функцію

$$\varphi = Y \cos \alpha x,$$

де Y — функція, що залежить тільки від координати y;

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}; \qquad \text{(г)}$$

n —будь-яке ціле число;

l — довжина пластинки в напрямку осі x.

З'ясуємо, при яких умовах функція φ є бігармонійною, тобто задовольняє рівнянню (5.8). Підрахуємо четверті похідні функції φ:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Підставляючи ці похідні в указане рівняння, отримуємо

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0$$

або

$$\cos\alpha x\left(Y^{IV}-2\alpha^2Y''+\alpha^4Y\right)=0.$$

Це рівняння перетворюється у тотожність за будь-яких значень аргументу x, якщо $Y(y)$ задовольняє наступному диференціальному рівнянню

$$Y^{IV}-2\alpha^2Y''+\alpha^4Y=0,$$

розв’язання якого можна подати за допомогою гіперболічних функцій:

$$Y=A_n\mathrm{ch}\alpha y+B_n y\mathrm{ch}\alpha y+C_n\mathrm{sh}\alpha y+D_n y\mathrm{sh}\alpha y. \qquad (5.14)$$

Підставляючи це розв’язання у вираз функції φ, отримаємо бігармонійну функцію у вигляді

$$\varphi(x,y)=\cos\alpha x\left(A_n\mathrm{ch}\alpha y+B_n y\mathrm{ch}\alpha y+C_n\mathrm{sh}\alpha y+D_n y\mathrm{sh}\alpha y\right).$$

Аналогічно можна показати, що функція

$$\varphi(x,y)=\sin\alpha x\left(A'_n\mathrm{ch}\alpha y+B'_n y\mathrm{ch}\alpha y+C'_n\mathrm{sh}\alpha y+D_n y\mathrm{sh}\alpha y\right)$$

також є бігармонійною і може бути застосована для розв’язання плоскої задачі.

Якщо числу n у співвідношенні (г) давати різні значення, то кожен раз будуть виходити нові функції, що відрізняються значеннями параметра α та постійними A_n, B_n, C_n, D_n. Тому загальне розв’язання бігармонійного рівняння (5.8) може бути представлено як сума всіх його можливих окремих розв’язань, тобто у вигляді нескінченного ряду

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\alpha x\left(A_n\mathrm{ch}\alpha y+B_n y\mathrm{ch}\alpha y+C_n\mathrm{sh}\alpha y+D_n y\mathrm{sh}\alpha y\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\alpha x\left(A'_n\mathrm{ch}\alpha y+B'_n y\mathrm{ch}\alpha y+C'_n\mathrm{sh}\alpha y+D'_n y\mathrm{sh}\alpha y\right)\right. \text{(6.18)} \quad (5.15)$$

Постійні A_n, B_n, … C'_n, D'_n визначаються з умов на контурі. Навантаження на контурі має бути розкладене у тригонометричний ряд Фур’є по синусах та косинусах.

За допомогою функції напружень (5.18), додаючи у випадку необхідності степеневі поліноми, можна отримувати розв’язання для більш широкого кола задач, ніж за допомогою тільки степеневих поліномів. Серед них можна назвати задачу про вигин балки-стінки, задачу про дію на пластинку навантажень, розподілених вздовж контуру за будь-яким законом (у тому числі зосередженої сили).

Питання для самоконтролю

1. Особливості плоскої деформації.

2. Кількість рівнянь достатніх для визначення напруженого стану в плоскій задачі якщо за умови задачі переміщення шукати не треба.

4. Яким умовам має задовільняти граничнна умова плоскої задачі для можливості її розвязання з використанням бігармонійної функції заданої добутком синусу (косинусу) та гіперболічних фунецій.

4. Яким умовам має задовільняти бігармонійна функція плоскої задачі теорії пружності.

ТЕМА 6. ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

6.1. Основні рівняння

При розв'язанні плоскої задачі зустрічаються тіла, обмежені поверхнями кругового циліндра та площинами, що розходяться радіально. В цих випадках перехід від декартової системи координат до полярної значно спрощує розв'язання.

В полярній системі координат положення будь-якої точки на площині визначається двома величинами: радіус-вектором r та полярним кутом θ, що відраховується від початкового радіус-вектора r_0. Розглянемо основні рівняння плоскої задачі в полярних координатах: диференціальні рівняння рівноваги, рівняння нерозривності деформацій, рівняння Коші та формули узагальненого закону Гука.

Виріжмо з пластинки товщиною, яка дорівнює одиниці, елемент $abcd$ (рис. 6.1). Для цього проведемо радіус Oab під довільним кутом θ до початкового радіус-вектора, потім дамо куту нескінченно малий приріст $d\theta$ та проведемо радіус Odc. Довільним радіусом $Oa = r$ проведемо дугу ad, потім дамо радіусу r приріст $ab = dr$ та проведемо наступну дугу — bc. Сторони отриманого елемента мають наступні розміри:

$$ab = cd = dr, \quad ab = rd\theta, bc = (r + dr)d\theta,$$

На краях елемента діють наступні складові напружень:

σ_r — радіальне нормальне напруження;

σ_θ — тангенціальне нормальне напруження;

$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$ — дотичні напруження;

R та Θ — складові об'ємної сили.

Складемо рівняння проекцій всіх сил на осі r та θ:

$$\left(\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta-\sigma_r r d\theta-\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr\sin\frac{d\theta}{2}-$$

$$-\sigma_\theta dr\sin\frac{d\theta}{2}+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)dr\cos\frac{d\theta}{2}-\tau_{r\theta}dr\cos\frac{d\theta}{2}+$$

$$+Rdr\cdot rd\theta=0;$$

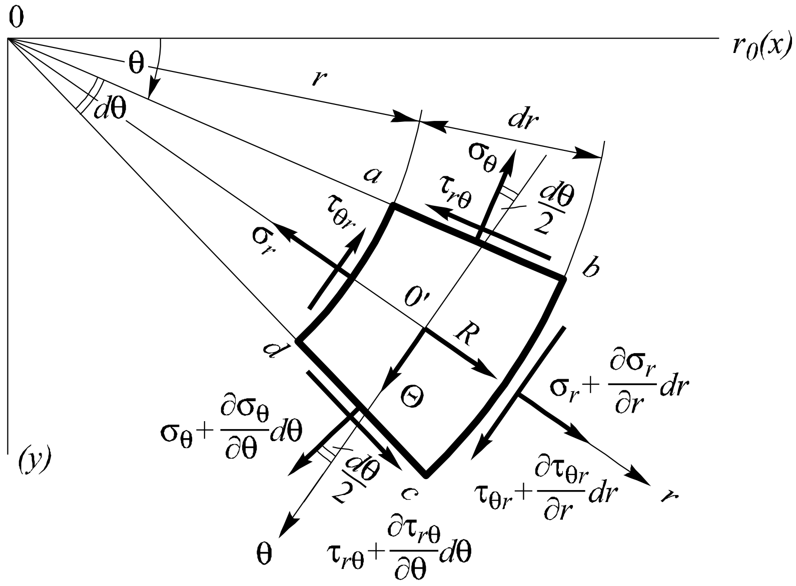

Рис. 6.1. Елементарна ділянка у полярній системі координат

$$\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr\cos\frac{d\theta}{2}-\sigma_\theta dr\cos\frac{d\theta}{2}+\left(\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta-$$

$$-\tau_{\theta r}rd\theta+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)dr\sin\frac{d\theta}{2}+\tau_{r\theta}dr\sin\frac{d\theta}{2}+\Theta dr\cdot rd\theta=0.$$

При спрощенні врахуємо, що з огляду на малість кута $d\theta$ можна прийняти

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)=\frac{d\theta}{2};\quad\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)=1.$$

Тоді, відкидаючи величини третього порядку малості та розділивши обидва рівняння на площу елементу $dr \cdot rd\theta$, отримаємо диференціальні рівняння рівноваги для плоскої задачі в полярній системі координат:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ &\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Особливістю цих рівнянь у порівнянні з умовами рівноваги (1.1) для плоскої задачі в декартових координатах є наявність у знаменнику величини r. Чим ближче до початку координат (полюсу) розташована точка, що розглядається, тим швидше будуть зростати доданки, що містять множник $\frac{1}{r}$, оскільки r необмежено зменшується. Тому вони не прийнятні для точок, що лежать поблизу полюса.

Перетворимо до полярних координат рівняння нерозривності деформацій (2.8).

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0. \tag{а}$$

Вкажемо що у плоскій задачі в кожній точці сума нормальних напружень по двох взаємно перпендикулярних площадках є величина постійна, і можна скласти наступну тотожність:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Замінюючи з його допомогою напруження у формулі (а), отримуємо рівняння нерозривності деформацій для плоскої задачі в полярній системі координат:

$$\nabla^2\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) = 0. \tag{б}$$

Однак оператор Лапласа в полярній системі має інший вигляд, ніж у прямокутній. Замінимо у формулі декартові координати на полярні. Для цього на рис. 6.1 вісь x сполучимо з початковим радіус-вектором r_0, а вісь y спрямуємо донизу. В цьому випадку полярні координати пов'язані з декартовими наступними залежностями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.2}$$

Диференціюючи ці залежності по x і y та враховуючи, що $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $\frac{y}{r} = \sin\theta$, знаходимо

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}; \\ &\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{в}$$

Обчислюємо перші похідні по x і y довільної функції $\psi(r, \theta)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}. \end{aligned}\right\}$$

Використовуючи вирази (в), отримуємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}; \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{г}$$

Аналогічно обчислюємо другі похідні тієї ж функції:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)=\\
&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\theta-\\
&-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r}=\\
&=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\cos^2\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\right)\sin 2\theta;\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)=\\
&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\theta+\\
&+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}=\\
&=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\sin^2\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)\cos^2\theta-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\right)\sin 2\theta.
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{(д)}
$$

Сполучимо вісь x з радіус-вектором r. В цьому випадку $\theta = 0$ та похідні в декартовій системі координат (г) та (д) виразяться через похідні в полярній системі наступним чином:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad &&\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta};\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}, \qquad &&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{(е)}
$$

Тоді оператор Лапласа приймає вигляд

$$
\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \qquad \text{(ж)}
$$

Використовуючи ці вирази в рівнянні (б), отримаємо розвернуте рівняння нерозривності деформацій для плоскої задачі в полярній системі координат:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right)=0. \qquad (6.3)$$

Виразимо в цій системі геометричні співвідношення Коші. Позначимо складову переміщення вздовж осі r через u, а вздовж осі θ — через v.

На рис. 6.2 зображений елемент *abcd* до деформування і положення точок a_1, b_1, та d_1 після деформування.

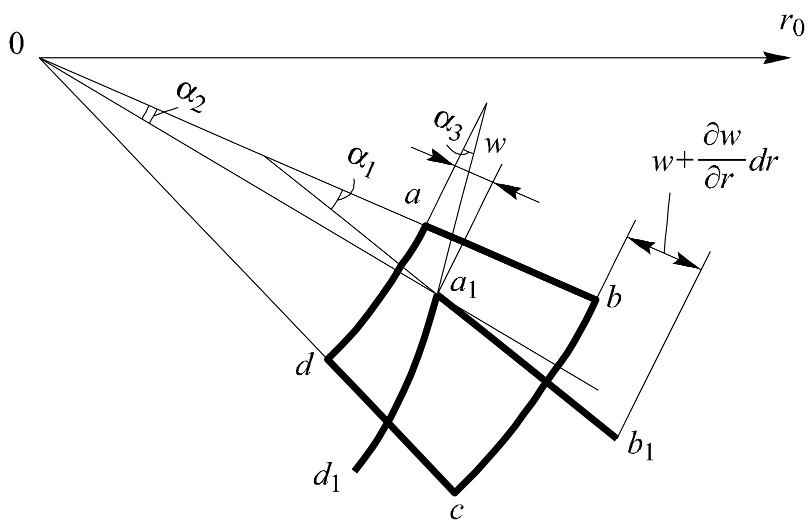

Рис. 6.2. Схема переміщень при деформації елемента *abcd*

Відносне подовження вздовж осі θ залежить як від складової переміщення w, так і від складової v. В першому випадку

$$\frac{(r+w)d\theta-rd\theta}{rd\theta}=\frac{w}{r};$$

у другому —

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Тут елемент дуги ds замінений на добуток $r\partial\theta$. Сумарне подовження

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{r}. \tag{з}$$

Відносне подовження у напрямку r за рахунок переміщення w знаходимо аналогічно тому, як це зроблено в декартовій системі координат:

$$\varepsilon_r = \frac{\left[dr + \left(w + \frac{\partial w}{\partial r}dr\right) - w\right] - dr}{dr} = \frac{\partial w}{\partial r}. \tag{и}$$

Кутова деформація в площині, що розглядається:

$$\gamma_{\theta r} = (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_3 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}, \tag{к}$$

де $$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha_2 = \frac{v}{r}; \quad \alpha_3 = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}.$$

Таким чином, геометричні співвідношення Коші в полярній системі координат утворюють систему рівнянь (з), (и), (к):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Формули закону Гука для узагальненого плоского напруженого стану в полярних координатах зберігають такий же вигляд, як і в декартовій системі, при заміні індексів x та y на θ та r:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right); \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right); \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{\theta r}. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

У випадку плоскої деформації в прямокутних координатах пружні постійні E та ν у формулах (6.5) мають бути замінені відповідно на пружні постійні E_1 та ν_1 згідно формулам

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}; \\ \nu_1 &= \frac{\nu}{1-\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

6.2. Простий радіальний напружений стан

Для розв'язання плоскої задачі в напруженнях у полярній системі координат маємо два рівняння рівноваги (6.1) та рівняння нерозривності деформацій (6.3). Однак, часто приходиться мати справу з напруженим станом, при якому в усіх точках тіла діють тільки радіальні нормальні напруження σ_r. Інші складові напружень, як і складові об'ємних сил, дорівнюють нулю. Такий напружений стан називається простим радіальним.

У цьому випадку одне рівняння рівноваги перетворюється у тотожність, а інше рівняння та рівняння нерозривності деформацій значно спрощуються:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0; \\ &\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial\theta^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Систему рівнянь (а) можна здійснити інтегрування у загальному вигляді методом Фур'є. Для цього представимо напруження σ_r, що є функцією двох перемінних r та θ, у вигляді добутку двох функцій:

$$\sigma_r(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta), \tag{б}$$

перша з яких є функцією тільки однієї перемінної r, а друга — тільки перемінної θ.

Підставляючи функцію (б) в рівняння (а), отримуємо два ординарних диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями φ та ψ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'\psi + \frac{\varphi\psi}{r} = 0; \\ \varphi''\psi + \frac{\varphi'\psi}{r} + \frac{\varphi\psi''}{r^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{в}$$

Перше рівняння (в) після ділення на ψ дає:

$$\varphi' + \frac{\varphi}{r} = 0,$$

звідки після розділення перемінних отримуємо:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{r}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\ln\varphi = -\ln r + \ln C,$$

або

$$\ln\varphi = \ln\frac{C}{r}.$$

Після потенціювання знаходимо функцію

$$\varphi = \frac{C}{r}. \qquad (г)$$

Для визначення функції ψ підставимо знайдену функцію φ у друге рівняння (в):

$$\left(2\frac{C}{r^3}\right)\psi + \frac{1}{r}\left(-\frac{C}{r^2}\right)\psi + \frac{1}{r^2}\left(\frac{C}{r}\right)\psi'' = 0.$$

Після ділення на дріб $\frac{C}{r^3}$ отримуємо диференціальне рівняння

$$\psi'' + \psi = 0.$$

Його розв'язання представляється у вигляді

$$\psi = A\cos\theta + B\sin\theta. \qquad (д)$$

Підставляючи розв'язання (г) та (д) у вираз (б), знаходимо

$$\sigma_r = \frac{C}{r}\left(A\cos\theta + B\sin\theta\right). \qquad (е)$$

Для зручності подальших викладок введемо нові довільні постійні k та θ_0:

$$C \cdot A = -k\cos\theta_0; \qquad C \cdot B = -k\sin\theta_0.$$

Тоді функція (е) прийме вигляд

$$\sigma_r = -\frac{k}{r}\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\right), \qquad (6.6)$$

або, якщо застосувати тригонометричну формулу перетворення косинуса різності двох кутів,

$$\sigma_r = -\frac{k}{r}\cos\left(\theta - \theta_0\right).$$

Отже, простий радіальний напружений стан представляється наступними напруженнями:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{k}{r}\cos(\theta-\theta_0)\,;\\ \sigma_\theta &= \tau_{\theta r} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Постійні k та θ_0 визначаються з крайових умов.

6.3. Розрахунок труби з товстими стінками

Прикладом вісесиметричної задачі є задача Ламе про товстостінну круглу трубу, що знаходиться під дією внутрішнього p_a та зовнішнього p_b рівномірних тисків (рис. 6.3). Внутрішній радіус труби дорівнює a, зовнішній — b.

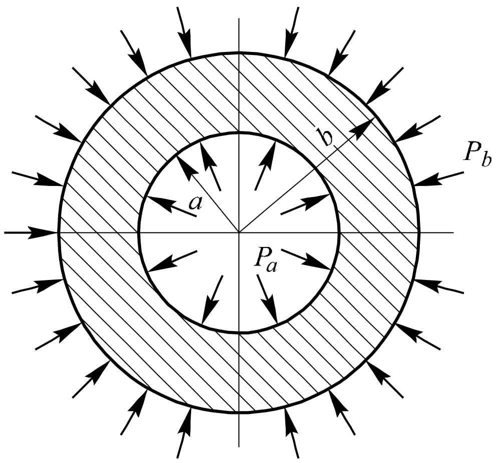

*Рис. 6.3.*Поперечний перетин труби

Для розв'язання скористаємося формулами напружень (6.7), отриманими з загального розв'язання вісесиметричної задачі в переміщеннях. Оскільки розглянута задача відноситься до випадку плоскої деформації, то указані формули мають включати пружні постійні E_1 та ν_1. Згідно позначенням (6.6), маємо

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-v_1^2}\left[(1+v_1)A+(1-v_1)\frac{B}{r^2}\right];\\ \sigma_r &= \frac{E_1}{1-v_1^2}\left[(1+v_1)A-(1-v_1)\frac{B}{r^2}\right].\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Для визначення постійних А та В маємо наступні умови на поверхні:

$$\text{при} \quad r = a \qquad \sigma_r = -p_a;$$

$$\text{при} \quad r = b \qquad \sigma_r = -p_b.$$

Підставляючи їх у формули (а), отримуємо:

$$-p_a = \frac{E_1}{1-v_1^2}\left[(1+v_1)A-(1-v_1)\frac{B}{a^2}\right];$$

$$-p_b = \frac{E_1}{1-v_1^2}\left[(1+v_1)A-(1-v_1)\frac{B}{b^2}\right].$$

Розв’язуючи сумісно ці рівняння, знаходимо:

$$A = \frac{1-v_1}{E_1}\,\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2-a^2};$$

$$B = \frac{1+v_1}{E_1}\,\frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{b^2-a^2}.$$

Після підстановки знайдених постійних в рівняння (а) отримуємо напруження:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2-a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2\left(b^2-a^2\right)};\\ \sigma_r &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2-a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2\left(b^2-a^2\right)}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

Цікаво відзначити, що сума нормальних напружень σ_θ та σ_r у всіх точках труби однакова. Дійсно, складаючи почленно формули (6.8), знаходимо

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 2\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = const. \qquad (б)$$

У випадку плоскої деформації в поперечних перетинах труби виникають також нормальні напруження σ_z у перетинах труби, перпендикулярних до її осі. За аналогією формулою (5.3),

$$\sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_r).$$

Підставляючи сюди суму напружень (б), отримуємо

$$\sigma_z = 2\nu\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = const.$$

Таким чином, осьові нормальні напруження σ_z постійні по довжині труби. Виключення складають перетини, які містяться поблизу кінців труби, де труба не буде підлягати плоскій деформації.

В окремому випадку, коли на трубу діють тільки внутрішній тиск, тобто $p_b = 0$, формули напружень (6.8) приймають наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right); \\ \sigma_r &= -\frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

Епюри цих напружень зображені на рис. 6.4, *а*. Найбільші нормальні напруження виникають в точках поблизу внутрішньої поверхні труби, тобто коли $r = a$:

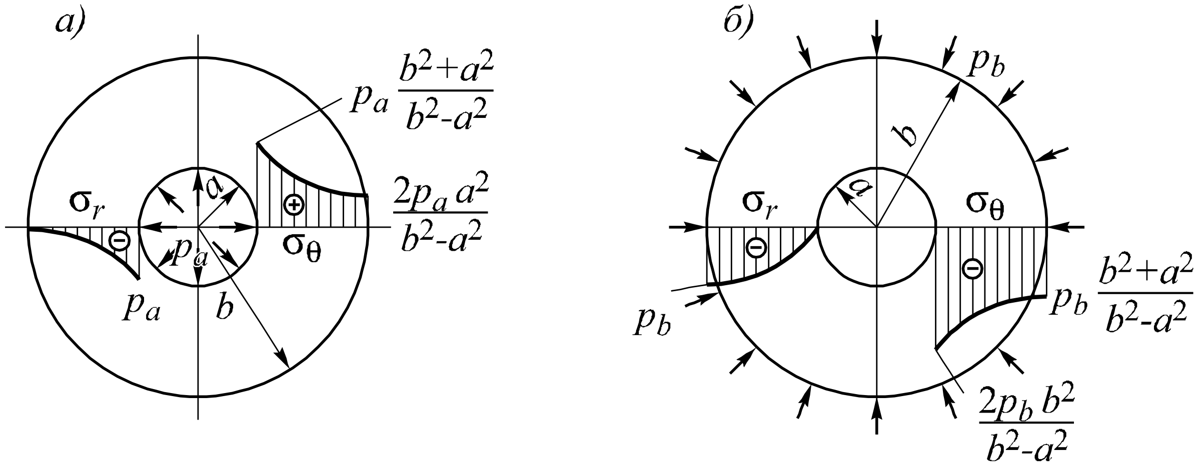

Рис. 6.4. Епюри напружень у поперечному перетині труби

$$\sigma_{\theta\max} = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}; \quad \sigma_{r\max} = -p_a .$$

В точках поблизу зовнішньої поверхні труби (коли $r = b$) маємо:

$$\sigma_\theta = \frac{2p_a a^2}{b^2 - a^2}. \quad \sigma_r = 0;$$

Розглянемо трубу з зовнішнім радіусом, набагато більшим внутрішнього. З формул (6.9), після ділення чисельника та знаменника на b^2, отримуємо:

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{1 - \frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2}\right);$$

$$\sigma_r = -\frac{p_a a^2}{1 - \frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Переходячи до межі коли $b \to \infty$, знаходимо,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_a a^2}{r^2};\\ \sigma_r &= -\frac{p_a a^2}{r^2}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(в)}$$

Це означає, що всі точки труби піддаються однаковим по значенню радіальним і тангенціальним напруженням, що відрізняються лише знаком. Отже, труба з нескінченно великим зовнішнім радіусом знаходиться в умовах чистого зсуву. В точках внутрішньої поверхні при $r = a$ ці напруження дорівнюють тиску p_a, а в точках при $r = 4a$ вони складають $\frac{1}{16}P_a$. Якщо в практичних розрахунках достатня точність в 6%, то зовнішній радіус $b > 4a$ можна вважати нескінченно великим. В цьому випадку розв'язання не пов'язане з формою зовнішнього контуру і формули (в) характеризують розподілення напружень для труби з будь-якою формою зовнішнього контуру при умові, що всі його точки відстоять від центру отвору на відстані, більшій $4a$.

В іншому окремому випадку, коли на трубу діє тільки зовнішній тиск (p_a = 0), з формул (6.9) отримуємо

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right);\\ \sigma_r &= -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

В точках внутрішньої поверхні при $r = a$

$$\sigma_\theta = -\frac{2 p_b b^2}{b^2 - a^2}; \qquad \sigma_r = 0,$$

а в точках зовнішньої поверхні при $r = b$

$$\sigma_\theta = -p_b \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}; \qquad \sigma_r = -p_b.$$

6.4. Розв’язання вісесиметричної задачі за допомогою функції напружень

Розглянемо розподіл напружень в пружному напівнпросторі $0 \le z \le \infty$ під дією зосередженої нормальної сили Р. За такої схеми напружено-деформований стан вісесиметричний. Відповідно до роботи [1] функція напружень має вигляд.

$$\varphi = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \begin{aligned} & R_1 + \left[8\mu(1-\mu)-1\right]R_2 - \frac{2cz}{R_2} + \\ & +4(1-2\mu)\left[(1-\mu)z\ln(R_2+z+c)\right] \end{aligned} \right\}. \tag{6.11}$$

Вона задовольняє умові

$\Delta^2\Delta^2 = 0,$

де $\Delta^2 = \dfrac{\partial}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial}{\partial z^2}$.

При цьому напруження в пружному середовищі визначаються наступними залежностями.

$$\begin{aligned}
Rr &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\Delta^2 - \frac{\partial}{\partial r^2}\right)\varphi; \\
B\beta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\Delta^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi; \\
Zz &= \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\Delta^2 - \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\varphi; \\
Rz = Zr &= \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\mu)\Delta^2 - \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\varphi; \\
R\beta &= Br = Bz = Z\beta = 0,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

де R_1 - радіус-вектор, від проекції точки прикладення зосередженої сили до точки визначення напружень та переміщень; R_2- радіус-вектор, від точки розташований на нормалі до поверхні симетрично точці прикладення зосередженої сили до точки визначення напружень та переміщень; *r*- радіус-вектор, від z до поточної точки визначення напружень та переміщень.

$$R_1 = \sqrt{(z-c)^2 + r^2},$$
$$R_2 = \sqrt{(z+c)^2 + r^2}. \tag{6.13}$$

Переміщення матеріалу

$$u_r = -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z};$$
$$u_z = -\frac{1}{2G}\left(2(1-\mu)\Delta^2 - \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\varphi. \tag{6.14}$$

де $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

Приймемо наступні позначення.

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi$$
$$\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$
$$\Xi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{6.15}$$

З урахуванням значення функції напружень маємо

$$\Omega = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\left[8\mu(1-\mu)-1\right]r^2 + 1zc}{(z+c)^2 + r^2} - \dfrac{6zcr^2}{\left[(z+c)^2 + r^2\right]^2} + \\ + \dfrac{4(z+c)^2(1-2\mu)}{\left[(z+c)^2 + r^2\right]\left(\sqrt{(z+c)^2 + r^2} + z + c\right)} - \\ - \dfrac{4\left[(1-\mu)z - \mu c\right](1-3\mu)r^2}{\left(\sqrt{(z+c)^2 + r^2} + z + c\right)^2} \end{array}\right]\frac{1}{\sqrt{(z+c)^2 + r^2}} + \tag{6.16}$$

$$+\frac{\left(z-c\right)^2}{\left(\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}\right)^3},$$

$$\Theta=\left[8\left(\mu-1\right)-1+\frac{2zc}{\left(z+c\right)^2+r^2}+\frac{4\left(1-2\mu\right)\left[\left(1-\mu\right)z-\mu c\right]}{\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}+z+c}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(z-c\right)^2+r^2}},\tag{6.17}$$

$$\Xi=\frac{1}{\sqrt{\left(z-c\right)^2+r^2}}-\frac{\left(z-c\right)^2}{\sqrt{\left(z-c\right)^2+r^2}^3}+\frac{8\mu\left(1-\mu\right)-1+4\left(1-\mu\right)^2}{\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}}+$$

$$+\frac{4c\left(z+c\right)-\left[8\mu\left(1-\mu\right)-1\right]\left(z+c\right)^2+ +2zc-4\left[z+c-\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}\right]\left(1-\mu\right)^2z-\mu z}{\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}^3}-\tag{6.18}$$

$$-\frac{6z\left(z+c\right)^2}{\sqrt{\left(z+c\right)^2+r^2}^5}-4\frac{\left(1-2\mu\right)\left[\left(1-\mu\right)z-c\mu\right]}{\left(z+c\right)^2+r^2}.$$

Напруження.

$$Rr=\left(\frac{d}{dz}\left(\mu\left(\Xi+\Theta\right)-\left(1-\mu\right)\Omega\right)\right)\frac{P}{8\pi\left(1-\mu\right)}$$

$$B\beta=\frac{d}{dz}\left(\mu\left(\Omega+\Xi\right)-\left(1-\mu\right)\Theta\right)\frac{P}{8\pi\left(1-\mu\right)}$$

$$Zz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(2-\mu\right)\left(\Omega+\Theta\right)+\left(1-\mu\right)\Xi\right)\varphi;$$

$$Rz=Zr=\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1-\mu\right)\left(\Omega+\Theta\right)-\mu\Xi\right)\varphi.$$

Переміщення.

$$u_z=\frac{P\left(\left(1-\mu\right)\left(\Omega+\Theta\right)+\left(0{,}5-1\mu\right)\Xi\right)}{8G\pi\left(1-\mu\right)}.$$

$$u_r=-\frac{P}{16G\pi(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left\{\begin{matrix}R_1+\left[8\mu(1-\mu)-1\right]R_2-\dfrac{2cz}{R_2}+\\ +4(1-2\mu)\left[(1-\mu)z\ln\left(R_2+z+c\right)\right]\end{matrix}\right\}$$

Подамо значення радіуса вектора в ортогональних координатах.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Врахуємо, що радіуси-вектори в ортогональних площинах, відповідно до наведеного визначення, мають наступний вигляд.

$$R_1=\sqrt{(z-c)^2+x^2+y^2},\ R_2=\sqrt{(z+c)^2+x^2+y^2}.$$

6.5. Розв'язання задач за допомогою функції напружень в циліндричних координатах

Розподіл напружень в суцільному безмежно довгому циліндрі визначимо з використанням функції напружень (функції Ері) $\phi\left(r,\beta\right)$ [1].

$$\phi\left(r,\beta\right)=B_0\beta+Aln(r)+Br^2ln(r)+Cr^2+\left(B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\,ln(r)\right)sin\left(\beta\right)-$$
$$-\frac{2D_1}{1-\mu}r\beta\,sin\left(\beta\right)+\left(A_mr^m+B_mr^{m+2}+C_mr^{-m}+D_mr^{-m+2}\right)sin\left(m\,\beta\right).\qquad(6.19)$$

де $B_0,\ A,\ B,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_m,\ B_m,\ C_m,\ D_m$ - невідомі сталі; $m=2,\ 3,\ \dots$ – ціле число.

Відзначимо, що функцію напружень в при розгляді «простого радіального напруженого стану» використовували одну складову функції, а саме $\phi\left(r,\beta\right)=C_1r^{-1}$.

Загальне рішення рівнянь рівноваги з використанням функції напружень отримують прийнявши напруження за наступними формулами.

$$Rr=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2},\qquad B\beta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},\qquad Br=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right),$$

де Rr, $B\beta$ - нормальні напруження Br - дотичні.

Звідки напруження для прийнятої функції:

$$Br(r,\beta)=B_0r^{-2}+\left(2B_1r+2C_1r^{-3}+D_1r^{-1}\right)\cos(\beta)-$$
$$-\left(A_mr^{m-2}(1-m)-B_mr^m(1+m)+C_{\,m}r^{-m-2}(1+m)-D_mr^{-m}(1+m)\right)m\ \cos(m\ \beta).$$

$$Rr(r,\beta)=Ar^{-2}+B\left(2\ln(r)+1\right)+2Cr+\left(2B_1r+2C_1r^{-3}+D_1r^{-1}\right)\sin(\beta)+$$
$$+\left(A_mr^m(1-m)+B_mr^m\left(m+2-m^2\right)-C_{\,m}r^{-m-2}\left(m(1+m)\right)+D_mr^{-m}\left(-m+2-m^2\right)\right)\sin(m\ \beta).$$

$$B\beta(r,\beta)=Ar^{-2}+B\left(2\ln(r)+3\right)+2Cr+\left(6B_1r+2C_1r^{-3}+D_1r^{-1}\right)\sin(\beta)+$$
$$+\begin{pmatrix}A_mr^{m-2}\left(m(m-1)\right)+B_mr^m(m+2)(m+1)+\\+C_{\,m}r^{-m-2}m(m+1)+D_mr^{-m}(m-2)(m-1)\end{pmatrix}\sin(m\ \beta).$$

Питання для самоконтролю

1.За яких умов доцільне розвязання плоскої в полярних координатах.

2. Якими величинами задається положення будь-якої точки на площині.

3. Який напружений стан називається простим радіальним.

4. Чому при радіальному напруженому стані спрощується пошук рішення задачі.

5. Сутність задачі Ламе про товстостінну круглу трубу.

6. які напруження визначають напружений стан в задачі Ламе про товстостінну круглу трубу.

ТЕМА 7. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З ВИКОРИСТАННЯМ САПР

7.1. Метод кінченних елементів

Розглянуті вище методи визначення напруженого стану дозволяють отримати аналітичні вирази показників напружено-деформованого стану деталі, які дозволяють встановлювати зв’язки поміж напруженнями, залежність напружено-деформованого стану від механічних властивостей, форми деталей, характеру навантажень. Разом з тим їх практичне застосування в практиці суттєво ускладнено завданням форми деталі та характером навантаження – граничними умовами. Таких недоліків позбавлені методи сучасних САПР, що при розрахунках використовують метод кінченних елементів (МКЕ) Форму деталі задають просторовими електронними псевдо-реальними моделями.

Метод кінчених елементів нині є стандартом при розвязанні задач механіки твердого тіла за допомогою чисельних алгоритмів. Абсолютна більшість конструктивних елементів, вузлів і конструкцій, виготовлених з найрізноманітніших матеріалів, що мають різну природу, можуть бути розраховані за допомогою МКЕ. При цьому, зрозуміло, треба враховувати неминучі при будь-якій чисельній апроксимації умовності і похибки. В основі методу лежить поділ об'єкту на елементарні складові з метою рішення рівнянь механіки суцільного середовища в припущенні, що ці співвідношення виконуються в межах кожної з елементарних областей. Ці області називаються кінченними елементами. В межах кінченного елементу призначаються властивості обмежуваної ним ділянки об'єкту (це можуть бути, наприклад, характеристики жорсткості і міцності матеріалу, щільність і т. д.) і описуються поля величин (для механіки твердого тіла це переміщення, деформації, напруження і т. д.). Параметри з другої групи призначаються у вузлах елементу, а потім вводяться інтерполюючи функції, за допомогою яких відповідні значення можна вичислити в будь-якій точці усередині елементу або на його межі. Завдання математичного опису елементу зводиться до того, щоб зв'язати діючі у вузлах чинники. У механіці суцільного середовища це, як правило, переміщення і зусилля. Розглянемо прямий метод побудови рівнянь, що зв'язують ці чинники в межах кінченного елементу, в лінійній постановці.

Поле переміщень Δ в межах елементу (для просторового завдання $\Delta = [u, v, w]$ за допомогою інтерполяційних функцій (в так званих ізопараметричних кінченних елементах - ідентичні функціям форми), зібраних в матрицю $[N]$, виражається через вузлові переміщення $\{\Delta\}$. Інтерполяційні функції за величинами, наприклад, переміщень у вузлах, дозволяють визначити їх значення в будь-якій точці елементу в залежності від координат. У матричному виді співвідношення мають вигляд:

$\Delta = N\{\mathit{\Delta}\}$

Для просторового завдання $\{\mathit{\Delta}\}$ = [w_l, u, v, w_l, u_2, v_2, w_i,.., v_k, w_k]

k- число вузлів кінченного елементу.

2. Поле деформацій $\sigma = [\AA]\varepsilon$ виражається через ступені свободи $\{\mathit{\Delta}\}$ за допомогою

диференціювання поля переміщень (а фактично інтерполяційних функцій) згідно із співвідношеннями, зібраними в матрицю [D] що пов'язує деформації з переміщеннями:

$\varepsilon = [D]\{\mathit{\Delta}\}$

3. З урахуванням рівнянь стану, в основі яких лежить закон Гука і коефіцієнти яких утворюють матрицю $[\AA]$, встановлюється зв'язок між полем напружень і полем деформацій :

$\sigma = [\AA]\varepsilon$,

а потім і між напругою і ступенями свободи у вузлах:

$\sigma = [\AA]\ [D]\ \{\mathit{\Delta}\}$

4. Формулюються вирази для сил $\{F\}$, що діють у вершинах елемента, залежно від поля напружень. Для цього використовується матриця перетворення напружень у вузлові сили $[A]$:

5. Зв'язуються вирази для вузлових сил і переміщень у вузлах:

$\{F\} = [k]\{\mathit{\Delta}\}$,

де $[k] = [A][E][D]$- матриця жорсткості кінченного елементу.

Перераховані залежності дозволяють, знаючи переміщення у вузлах, отримати величини сил, а також вирішити зворотну задачу: за значеннями сил знаходити переміщення, потім деформації і напруги в межах кінченного елементу.

Пряме формулювання, як правило, використовується для отримання матриць жорсткості кінченних елементів стержнів, балок і пластин, а також для опису процесу теплопровідності.

Для отримання матриць жорсткості просторових елементів здебільшого використовуються варіаційні принципи, наприклад, принцип мінімуму потенційної енергії. Отримана таким чином матриця жорсткості з пункту 6 тут обчислюватиметься як:

$$[k] = \int_{v} [D]^{T} [E][D] dxdydz$$

Проблема інтеграції за об'ємом тіла складної форми або ж, у разі оболонкових елементів, - по криволінійній поверхні вирішується за рахунок того, що вирази записуються в локальній системі координат, пов'язаній з елементом ξ, ψ, η причому координати змінюються в інтервалі [-1, +1]. При цьому вираження для елементарного об'єму набуває вигляду:

$$dxdydz = |J| d\xi d\psi d\eta$$

де \J\ - визначник матриці Якобі, або якобіан перетворення. Тоді:

$$[k] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [D]^{T} [E][D] d\xi d\psi d\eta$$

Інтеграли вираховують чисельними способами Цей процес супроводжується розрахунком величини визначника якобіана. Негативна величина є наслідком вироджуваності цього кінченного елементу. Як правило, інформація про цю обставину поміщається в діагностичні повідомлення програми.

7. 2 Функціональні можливості

COSMOSWorks має стандартний інтерфейс додатка SolidWorks. Після активізації COSMOSWorks в меню SolidWorks виникає відповідний пункт, за яким ховається меню програми SolidWorks та з'являється Менеджер

COSMOSWorks, що є деревом. У нім присутні позиції, що характеризують проект в цілому: піктограма Параметри (Parameters)), а також піктограми з Вправами (Studies), що з’являються після їх створення користувачем. Вправи є гілками, що об'єднують інформацію про деякий розрахунок: матеріали, сітка, граничні умови, результати, звіти. Кожній піктограмі відповідає контекстне меню, вміст якого змінюється залежно від поточного стану розрахункової моделі.

COSMOSWorks дозволяє виконувати виконувати:

статичний аналіз в пружній постановці з розрахунком окремих деталей по просторовій або оболонковій моделі, а також складених вузлів з урахуванням взаємодії деталей;

розрахунок власних частот і відповідних ним форм для деталей, а також складених вузлів з нерухомих деталей;

розрахунок величин критичних навантажень втрати стійкості і форм для деталей, а також складених вузлів з нерухомими деталями;

тепловий розрахунок з урахуванням явищ теплопровідності, конвекції, випромінювання, але без урахування руху середовищ;

термопружний аналіз на базі результатів теплового розрахунку;

імітація деформації конструкції;

моделювання ефекту падіння конструкції на жорстку поверхню;

втомний розрахунок з урахуванням кривих втоми, форми кривої навантаження, а також лінійної гіпотези підсумовування ушкоджень.

Усі ці типи аналізу можуть бути пов'язані з одним і тим же об'єктом SolidWorks.

7.3. Послідовність розрахунку

COSMOSWorks вимагає дотримання базової схеми алгоритму методу кінченних елементів, надаючи усередині кожного етапу певну свободу в послідовності кроків підготовки моделі і розгляду результатів. Для розрахунку в пружній постановці передбачуваний ланцюжок подій описаний далі.

1. Створення аналізу певного типу і визначення його налаштувань (можуть бути змінені у будь-який момент перед виконанням розрахунку).

2. Заповнення, якщо необхідно, таблиці параметрів, що визначає набір величин, які можуть змінюватися.

3. Підготовка початкових даних усередині заданого аналізу:

- призначення матеріалу деталі або деталям;
- призначення кінематичних граничних умов;
- призначення статичних граничних умов;
- створення мережі.

4. Зв'язування, у разі потреби, параметрів з таблиці параметрів з відповідними аналізами.

5, Виконання розрахунку.

6. Обробка результатів:

- створення необхідних діаграм;
- аналіз діаграм;
- експорт результатів.

Граничні умови

COSMOSWorks підтримує різноманітні типи граничних умов. Для розрахунків в пружній постановці граничні умови не змінюються у часі. У нестаціонарному тепловому завданні можуть імітуватися теплові датчики, керівники перемиканням джерел тепла. У програмі передбачені імітатори з'єднань, пружної основи, зв'язку між недотичними деталями зборки, а також граничні умови, діючі на видаленні. Навантаження і переміщення можуть бути орієнтовані відносно глобальної системи координат, довідкових систем координат, об'єктів довідкової геометрії: площин, граней, кромок, осей, а також відносно циліндричних і сферичних об'єктів.

Генерація мережі

Побудова мережі здійснюється автоматично без можливості коригування. Передбачені інструменти управління щільністю мережі, проте призначення змінної щільності залежно від напряму неможливе. Адаптивна сітка припускає зміну порядку кінченних елементів в зонах значного градієнта щільності енергії деформування.

Створення мережі контактних задач відбувається автоматично після призначення користувачем (за умовчанням або в явному виді) типу контактних граничних умов. Розв'язується задача за командою виконати. Результати аналізують з використанням опції аналізу результатів.

Питання для самоконтролю

1. Переваги та недоліки визначення напружено-деформованого стану з використання чисельних методів.
2. Які методи переважно використовують системи САПР для визначення напружено-деформованого стану пружних тіл.
3. Які типи граничних умов дозволяє моделювати САПР COSMOSWorks.
4. Як відбувається створення мережі відбувається в САПР COSMOSWorks.
5. В яких формах можливо отримати результати в САПР COSMOSWorks.
6. Що покладено в основу методу кінченних елементів.
7. Які розрахунки дозволяє виконувати COSMOSWorks.

Література

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач теории упругости. Высшая школа: Москва 1977- 215 с.
2. Тимошенко С.П. Статические и динамические проблемы теории упругости / С.П. Тимошенко. — К.: Наукова думка, 1975. — 563 с.
3. Бейгул О.О., Лепетова Г.Л. Методи теорії пружності для дослідження та розрахунків металургійного обладнання. Навчальний посібник. Дніпродзержинський державний технічний університет, 191 с.

4. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. — Львів: Світ, 1994. — 560 с.

5. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості К.: Вища школа, 2002. - 308 с.

6. Божидарник В.В. Елементи теорії пластичності та міцності / В.В. Божидарник, В.В. Сулим –Львів: Світ, 1999. Т. 1. – 532с

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Теорія напруженого стану» для пошукачів вищої освіти, які навчаються за освітньо-науковими програмами третього PHD рівня зі спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»

Укладачі: Бельмас Іван Васильович, Танцура Ганна Іванівна

51900, м. Кам’янське, вул. Дніпробудівська, 2

Підписано до друку 25.06.20р.

Формат А4 Обсяг 2,9 д.а.

Тираж 30 прим. Замовлення № 273